

Tema: La recta real.

Ejercicios

1. Sean a y b dos números reales negativos con $a < b$. Demuestra que $a^2 > b^2$ y $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
2. Demuestra que para cualquier número real, x , se verifica $\frac{x^2 + 16}{8} \geq x$. ¿Para qué valores de x se cumple la igualdad?
3. Sean a y b dos números reales positivos. Demuestra que $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$. ¿En qué casos se da la igualdad?
4. Sean a y b dos números reales positivos. Demuestra que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. ¿En qué casos se da la igualdad?
5. Sean a, b, c y d cuatro números reales, de los cuales b y d son positivos. Demostrar:
 - 5.1. Si se cumple $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $bc - ad$ es positivo.
 - 5.2. Si se cumple $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
 - 5.3. Aplicando el resultado anterior, halla tres números reales comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. Representa gráficamente los conjuntos $A = [3,6)$, $B = [5,8)$, $C = \{1,4\}$ y expresa como uniones de intervalos, semirrectas, etc, cada uno de los conjuntos siguientes: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, A^c , B^c , C^c , $A^c \cap B^c$.
7. Representa gráficamente y en forma de intervalos los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 8\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 5\}$. Haz lo mismo con los conjuntos $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.
8. Demuestra que si $|x| < 3$, entonces $|2x^2 + 3x + 5| < 35$.
9. Acota la expresión $x+6$, sabiendo que $|x+3| < 0'2$.
10. Acota la expresión $|x^2 - 5x + 6|$ sabiendo que $|x - 2| < 0'1$ (Indicación: descompón en factores $x^2 - 5x + 6$).
11. Representa gráficamente el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} / \left|x + \frac{3}{2}\right| < 0'2\right\}$. Escríbelo también en forma de intervalo. Indica si este conjunto puede considerarse como un entorno simétrico de algún número real. Si la respuesta es afirmativa indica el centro y el radio de dicho entorno.
12. Expresa de varias maneras diferentes un entorno simétrico del punto -2 y de radio $0'3$. Sabiendo que x es un punto cualquiera de ese entorno, acota las expresiones $|x^2 + 4x + 4|$ y $|x^2 - 4|$.
13. Determina de forma razonada el radio de un entorno del punto 4 , $E(4,r)$, tal que si un punto, x , pertenece a dicho entorno se cumpla $|x^2 - 6x + 8| < 0'6$.
14. Escribe los intervalos $(2'3, 3'1)$ y $(-3, -1'6)$ como entornos simétricos de algún punto.
15. Halla de forma razonada el mayor entorno simétrico de 3 contenido en el intervalo $(2,6)$.
16. Halla la distancia del punto $3'999$ al punto 4 . Después, encuentra un entorno simétrico del punto $3'999$ que no contenga al 4 .